Deutsche Hochschule
für Prävention und Gesundheitsmanagement
University of Applied Sciences

Studienbrief

Mathematik für Informatik II

Analysis und Statistik

Inhaltsverzeichnis

Deutsche Hochschule für Prävention und Gesundheitsmanagement University of Applied Sciences

Deutsche Hochschule für Prävention und Gesundheitsmanagement University of Applied Sciences

1 Elementare Funktionen

Lernziele

Nach der Bearbeitung des Kapitels

- kennen Sie die Menge der reellen Zahlen als Erweiterung der rationalen Zahlen und können deren Eigenschaften und Axiome unter anderem in der Analysis und Geometrie einsetzen.
- sind Sie in der Lage, mit Polynomen zu rechnen, den Grad einer Funktion zu bestimmen und kennen verschiedene rationale Funktionen und ihre geometrische Darstellung.
- können Sie exponentielles und lineares Wachstum unterscheiden und den Begriff exponentielles Wachstum anhand von Beispielen von Wachstums- und Zerfallsprozessen erläutern.
- kennen Sie verschiedene trigonometrische Funktionen und können ihre speziellen Eigenschaften nutzen, um die zugehörigen Funktionsgraphen zu beschreiben und zu skizzieren.
- sind Sie in der Lage, irrationale Zahlen mithilfe von Zahlenfolgen und Reihen anzunähern beziehungsweise numerisch zu berechnen und darzustellen.
- kennen Sie verschiedene Stellenwertsysteme (wie z.B. das Binär- und Hexadezimalsystem) und können Zahlen in andere Systeme umwandeln.
- sind Sie in der Lage, reelle Zahlen als Fließkommazahlen darzustellen und sie damit für Computer lesbar zu machen.

Grundlegende Kenntnisse der Analysis werden in vielen Bereichen der Informatik benötigt. Dies reicht von der einfachen Berechnung einer Quadratwurzel bis hin zu numerischen Simulationen sowie Belichtungs- und Schattierungsverfahren in der Computergrafik.

1.1 Die reellen Zahlen

Im Modul *Mathematik für Informatik I* haben Sie bereits die Menge der **rationalen Zahlen** $\mathbb{Q}$ kennengelernt. Sie haben gelernt, dass es Zahlen gibt, mit denen wir gerne rechnen würden, die aber nicht in $\mathbb{Q}$ enthalten sind, wie zum Beispiel $\sqrt{2}$. $\mathbb{Q}$ weist also Lücken auf. So wie $\mathbb{Z}$ aus $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ aus $\mathbb{Z}$ konstruiert werden können, können die reellen (oder irrationalen) Zahlen $\mathbb{R}$ formal aus $\mathbb{Z}$ konstruiert werden, indem die Lücken gefüllt werden.

Eine mathematisch präzise Beschreibung ist in diesem Fall allerdings äußerst schwierig. Aus diesem Grund werden die reellen Zahlen mit einem alternativen Ansatz beschrieben. Dazu werden charakteristische, allgemeingültige Eigenschaften von $\mathbb{R}$ gesammelt und die reellen Zahlen als die Menge der Zahlen definiert, die diese Eigenschaften erfüllen. Sie werden dabei zusätzlich lernen, dass sich die reellen Zahlen ebenfalls mit der Menge aller Dezimalbrüche beschreiben lassen.

Im Folgenden werden die für das Rechnen mit reellen Zahlen geltenden „Axiome" für $\mathbb{R}$ beschrieben. Ein Axiom nennt man einen als absolut richtig erkannten Grundsatz, also eine gültige Wahrheit, die keines Beweises bedarf. Axiome bilden dabei das Fundament der mathematischen Theorie.

Die aus dem Modul *Mathematik für Informatik I* bekannten **Körperaxiome** (Eigenschaften eines Körpers) bilden zusammen mit den **Anordnungsaxiomen** und dem **Vollständigkeitsaxiom** die Basis, um die reellen Zahlen zu definieren.

1.1.1 Körperaxiome

Auf der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind zwei Verknüpfungen definiert:

i. Verknüpfung der **Addition**: $" + ": \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
ii. Verknüpfung der **Multiplikation**: $" \cdot " : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Beide Verknüpfungen sind Operationen, die zwei reelle Zahlen als Argumente nehmen, ihnen eine reelle Zahl als Ergebnis zuordnen und wie folgt definiert werden:

ABC **Definition 1.1 – Addition**

Es gibt eine Operation, genannt **Addition**

$$" + " \ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y$$

mit den Eigenschaften:

i. **Assoziativität**: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x + (y + z) = (x + y) + z = x + y + z$
ii. **Kommutativität**: $\forall x, y \in \mathbb{R}: x + y = y + x$
iii. **Neutrales Element**: $\exists 0 \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}: x + 0 = x$
iv. **Inverses Element**: $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}: x + y = 0$

Die Menge $\mathbb{R}$ bildet eine Abelsche (oder kommutative) **Gruppe** bezüglich der Addition. Das zu $x \in \mathbb{R}$ inverse Element $y = -x$ ist dabei eindeutig bestimmt.

Beispiel

Umwandlung einer Dezimalzahl ins Binärsystem:

- $(427)_{10}$ → Man dividiert zuerst sukzessive durch 2 und notiert die Reste, welche den Koeffizienten der Potenzen gelten, also a_0 von 2^0:

$$427 : 2 = 213\ Rest\ 1$$
$$213 : 2 = 106\ Rest\ 1$$
$$106 : 2 = 53\ Rest\ 0$$
$$53 : 2 = 26\ Rest\ 1$$
$$26 : 2 = 13\ Rest\ 0$$
$$13 : 2 = 6\ Rest\ 1$$
$$6 : 2 = 3\ Rest\ 0$$
$$3 : 2 = 1\ Rest\ 1$$
$$1 : 2 = 0\ Rest\ 1$$

Damit lautet die Binärdarstellung (also alle Reste aneinander): $(427)_{10} = (1\ 1010\ 1011)_2$

- $(0{,}1)_{10}$ → Man multipliziert zuerst sukzessive mit 2 und notiert die Überläufe, welche auch hier den Koeffizienten der Potenzen gelten, also zum Beispiel a_{-1} von 2^{-1}:

$$0{,}1 \cdot 2 = 0{,}2 \text{ Überlauf } 0$$
$$0{,}2 \cdot 2 = 0{,}4 \text{ Überlauf } 0$$
$$0{,}4 \cdot 2 = 0{,}8 \text{ Überlauf } 0$$
$$0{,}8 \cdot 2 = 1{,}6 \text{ Überlauf } 1$$
$$0{,}6 \cdot 2 = 1{,}2 \text{ Überlauf } 1$$
$$0{,}2 \cdot 2 = 0{,}4 \text{ Überlauf } 0$$

Da 0,4 bereits aufgetreten ist, wiederholen sich ab dort die Überläufe periodisch. Damit lautet die Binärdarstellung (also alle Überläufe aneinander):

$$(0{,}1)_{10} = (0\overline{0011})_2$$

Sie konnten nun anhand eines Beispiels sehen, dass eine rationale Zahl in einem Zahlensystem eine endliche und in einem anderen System eine unendliche Anzahl an Nachkommastellen besitzen kann.

Seien Sie sich aber gewiss, dass keine rationale Zahl in einem System unendlich viele nicht-periodische Nachkommastellen haben kann.

Formel

Lösungsformeln für allgemeine quadratische Gleichungen

Die sogenannte „a-b-c"- oder auch „Mitternachts"-Formel wird genutzt, um quadratische Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$ zu lösen, das heißt, wenn die einfache quadratische Ergänzung nicht angewendet werden kann, um die Nullstellen zu bestimmen. Die Nullstellen werden berechnet, indem man die Gleichung folgendermaßen nach x auflöst und die Koeffizienten a, b, c in folgende Formel einsetzt:

$$x = \left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

Bei einer Funktion der Form $x^2 + px + q = 0$ kann man alternativ auch direkt die sogenannte „p-q"-Formel verwenden, um die Nullstellen der Funktion zu finden:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Beispiel

In diesem Beispiel wird das Steigungs- beziehungsweise Monotonieverhalten der folgenden Funktion untersucht:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^2 - x + \frac{6}{4}$$

Zunächst wird die erste Ableitung berechnet:

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{3}x^{3-1} + 2 \cdot \frac{1}{8}x^{2-1} - 1x^{1-1} + 0 \cdot \frac{6}{4} = x^2 + \frac{1}{4}x - 1$$

Der zugehörige Funktionsgraph entspricht einer nach oben geöffneten Parabel:

1 Deskriptive Statistik

Lernziele

Nach der Bearbeitung des Kapitels

- kennen Sie die wichtigsten Grundlagen der deskriptiven Statistik,
- können Sie die Häufigkeitsverteilung einer Stichprobe mithilfe der absoluten und relativen Häufigkeit der einzelnen Stichprobenwerte beschreiben,
- kennen Sie den Zusammenhang zwischen Lage- und Streuungskennwerten einer Stichprobe und wissen, wie man verschiedene Kennwerte berechnet,
- wissen Sie, was man unter der linearen Korrelation zweier Merkmale versteht,
- sind Sie in der Lage eine Regressionsanalyse durchzuführen.

Die Statistik befasst sich mit der Sammlung, Organisation, Analyse, Interpretation und Präsentation von Daten und Informationen, ohne dass dabei alle Objekte einzeln untersucht werden müssen. Dabei unterscheidet man zwischen verschiedenen Teilbereichen der Statistik und deren Grundbegriffen.

1.1 Grundbegriffe

Bei der Anwendung der Statistik auf ein wissenschaftliches, industrielles oder soziales Problem ist es üblich, mit einer **Stichprobe** aus einer statistischen **Grundgesamtheit** oder einem zu untersuchenden statistischen Modell zu beginnen. Bevölkerungen können verschiedene Personengruppen oder Objekte sein, wie zum Beispiel „alle Menschen, die in einem Land leben" oder „jedes Atom, aus dem ein Körper besteht". Man unterscheidet folgende drei Teilbereiche:

Definition 1.1 – Statistiken

Eine **deskriptive Statistik** beschreibt Daten („Deskription") und stellt diese übersichtlich dar. Dazu gehört auch die Ermittlung von Kenngrößen und die Validierung der Daten, also das Erkennen und gegebenenfalls Beheben von Fehlern im Datensatz.

Eine **explorative Statistik** ist eine Weiterführung und Verfeinerung der deskriptiven Statistik und umfasst die Suche („Exploration") nach Strukturen und Besonderheiten in den Daten.

Die **schließende Statistik** versucht mithilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung über die erhobenen Daten hinaus allgemeinere Schlussfolgerungen zu ziehen und diese auch zu beurteilen.

Für C gelten wieder 8 Fälle, für D hingegen 4 günstige Fälle (Herz, Karo, Pik, Kreuz):

$$P(C) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} = 0{,}25 \quad , \quad P(D) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

Da diese Ereignisse unvereinbar sind, gilt für $P(C \cap D) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$ (eine Herz-Dame unter 32 Karten). Daher gilt aus der Additionsregel:

$$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{32} = \frac{8 + 4 - 1}{32} = \frac{11}{32}$$

Exkurs

Geburtstagsparadoxon

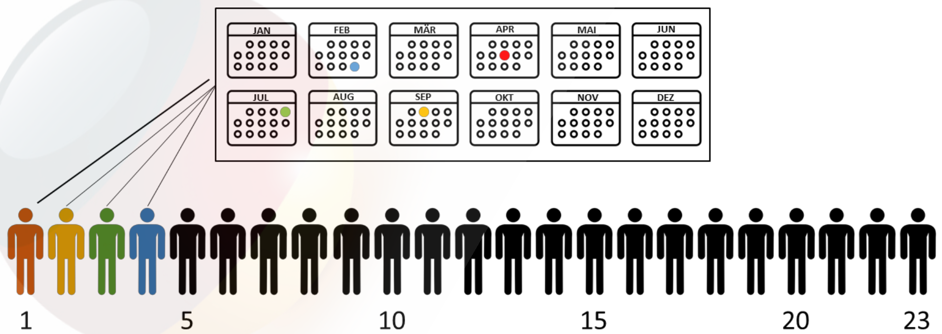
Wenn Sie bei einer Party mit mindestens 23 Personen wetten, dass zwei *beliebige* Personen auf der Party am gleichen Tag Geburtstag haben, sind Ihre Chancen zu gewinnen bei über 50 %! Die Erklärung dazu können Sie sich selbst aus dem bisherigen Wissen zur Wahrscheinlichkeit herleiten.

Zunächst formalisiert man die gesuchten Ereignisse:

$$A = 2\ \boldsymbol{beliebige}\ (oder\ mehr)\ von\ 23\ Personen\ haben\ an\ einem$$
$$\boldsymbol{beliebigen}\ gleichen\ Tag\ Geburtstag.$$
$$\bar{A} = Alle\ 23\ Personen\ haben\ an\ \boldsymbol{verschiedenen}\ Tagen\ Geburtstag.$$

Dabei gilt $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Stellen Sie sich vor, man stelle alle 23 Personen der Reihe nach nebeneinander auf, dann gibt es 365^{23} Möglichkeiten für die Liste der Geburtstage:



Beispiel

Dieses Beispiel betrachtet nochmal die bedingte Wahrscheinlichkeit von Ereignissen. Gegeben ist das Ereignis:

$$A = Trainingsgerät\ ist\ fehlerhaft.$$

Es werden nun drei unvereinbare Ereignisse E_1, E_2, E_3, drei Lieferanten $1{,}2{,}3$, und das Ereignis A („Trainingsgerät ist fehlerhaft“) betrachtet und $P(A)$ mithilfe der Formel für die totale Wahrscheinlichkeit berechnet.

Ein Sportverein bezieht Trainingsgeräte (z. B. Bälle) von genau drei verschiedenen Lieferanten, in unterschiedlichen Anteilen und in unterschiedlicher Qualität:

Wahrscheinlichkeit, dass Gerät von Lieferanten k geliefert wurde: $P(k)$
Bedingte Wahrscheinlichkeit, dass von Lieferanten k geliefertes Gerät *fehlerhaft* ist: $P(A|k)$

	Lieferant 1	Lieferant 2	Lieferant 3
$P(k)$, Anteil:	40 %	25 %	35 %
$P(A\|k)$, Ausschuss:	2 %	1 %	3 %

Nun soll die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, dass ein geliefertes Trainingsgerät fehlerhaft ist.

In Worten: Das Trainingsgerät (wurde von Lieferant 1 geliefert **UND** ist *fehlerhaft*) **ODER** (wurde von Lieferant 2 geliefert **UND** ist *fehlerhaft*) **ODER** (wurde von Lieferant 3 geliefert **UND** ist *fehlerhaft*).

Da das Gerät fehlerhaft von einem der drei Lieferanten kommen muss, gilt folgende Gleichung:

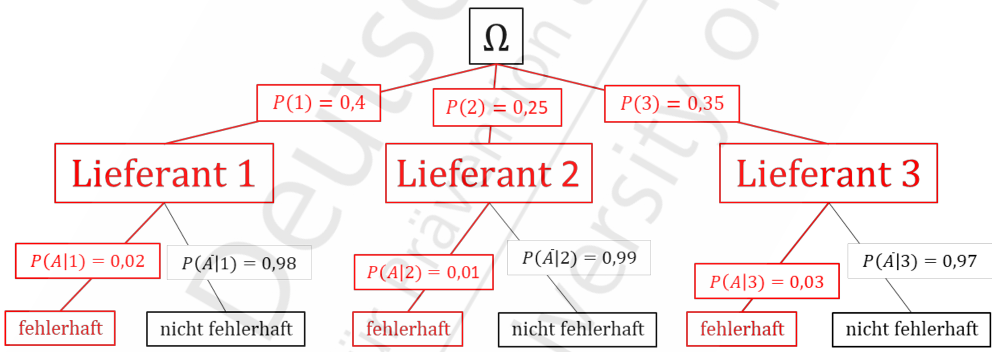
$$\begin{aligned} P(A) &= P\big((1 \cap A) \cup (2 \cap A) \cup (3 \cap A)\big) \\ &= P(1 \cap A) + P(2 \cap A) + P(3 \cap A) \\ &= P(1) \cdot P(A|1) + P(2) \cdot P(A|2) + P(3) \cdot P(A|3) \end{aligned}$$

Anhand der obigen Tabelle können nun die Wahrscheinlichkeiten abgelesen und eingesetzt werden:

$$P(A) = \frac{40}{100} \cdot \frac{2}{100} + \frac{25}{100} \cdot \frac{1}{100} + \frac{35}{100} \cdot \frac{3}{100}$$
$$= \frac{80 + 25 + 105}{10000}$$
$$= \frac{21}{1000} = 0{,}0021 = 0{,}21\%$$

Doch wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein fehlerhaftes Trainingsgerät von Lieferanten 2 stammt? Gesucht ist hier die Wahrscheinlichkeit $P(1|A)$. Mithilfe des Multiplikationsgesetzes bedingter Wahrscheinlichkeiten kann nun die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnet werden:

$$P(1) \cdot P(A|1) = P(A) \cdot P(1|A)$$
$$\Leftrightarrow P(1|A) = \frac{P(1) \cdot P(A|1)}{P(A)}$$
$$= \left(\frac{40}{100} \cdot \frac{2}{100}\right) \cdot \frac{1000}{21}$$
$$= \frac{80}{10000} \cdot \frac{1000}{21}$$
$$= \frac{8}{21} = 0,\overline{380952}$$



Aus dem Multiplikationssatz der bedingten Wahrscheinlichkeit und der Formel für die totale Wahrscheinlichkeit lässt sich folgende Beziehung schließen:

Deutsche Hochschule für Prävention und Gesundheitsmanagement University of Applied Sciences

Formel

Wird außer n auch k auf nichtnegative ganze Zahlen eingeschränkt, so gilt:

- $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$
- $\binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1}$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (Symmetrie)
- $\binom{n}{k} = \frac{n+1-k}{k} \cdot \binom{n}{k-1}$
- $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1} \Leftrightarrow k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$
- $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6} \\
\binom{7}{0} \quad \binom{7}{1} \quad \binom{7}{2} \quad \binom{7}{3} \quad \binom{7}{4} \quad \binom{7}{5} \quad \binom{7}{6} \quad \binom{7}{7}
\end{array}
$$

Abb. 40: Rekursive Darstellung der Binomialkoeffizienten bis zur 7-ten Ebene mithilfe eines Pascal'schen Dreiecks. (© BSA/DHfPG)

Beispiel

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \cdot (6-2)!} = \frac{720}{48} = 15$$

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \cdot (6-4)!} = \frac{720}{48} = 15$$

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot (49-6)!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$
$$= \frac{10.068.347.520}{720} = 13.983.816$$

$$\binom{12}{5} = \frac{12!}{5! \cdot (12-5)!} = \frac{479.001.600}{120 \cdot 5.040} = 20.118.067.200$$

Deutsche Hochschule für Prävention und Gesundheitsmanagement University of Applied Sciences

Bei einer relativen Häufigkeit des Ereignisses $A = „Kopf“$ von weniger als $0{,}41775$ oder von mehr als $0{,}58225$ wird also die Hypothese mit der Irrtumswahrscheinlichkeit 10 % abgelehnt. Bei 100 Versuchen heißt das:

Für $\theta \notin [42; 58]$ wird p_0 abgelehnt, der nicht kritische Bereich ist also $[42; 58]$.

5.4.3 Fehlerentscheidung

Als Nächstes geht man im Eiweißriegel-Beispiel davon aus, dass der Erwartungswert tatsächlich gleich dem Sollwert von 100 Gramm ist. Zieht man in diesem Fall mehrere Stichproben der gleichen Größe $n = 10$, so werden in etwa $\alpha = 5\%$ davon ein arithmetisches Mittel liefern, das im kritischen Bereich des vorangegangenen Tests liegt. Für den Rest kann die Nullhypothese beibehalten werden.

Dennoch besteht die Wahrscheinlichkeit, dass man eine Stichprobe zieht, für die die Alternativhypothese gilt und H_0 verworfen werden muss. Dies könnte dann zur Testentscheidung „Nullhypothese verwerfen“ führen, was letztendlich aber eine **Fehlentscheidung** wäre.

Diese (wenn auch sehr geringe) Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese fälschlicherweise zu verwerfen, ist also gleich dem vorgegebenen Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$. Diese Fehlentscheidung wird in der Praxis auch als **Fehler 1. Art** oder auch **α-Fehler** bezeichnet. Im Gegenzug kann aber auch die Nullhypothese irrtümlich beibehalten werden, obwohl in Wirklichkeit die Alternativhypothese H_1 zutrifft:

ABC

Definition 5.7 – Fehler 1. und 2. Art

Bei einem statistischen Test spricht man von einem

- **Fehler 1. Art** (oder α-Fehler), wenn die Nullhypothese H_0 fälschlicherweise *abgelehnt* wird, obwohl sie *wahr* ist.
- **Fehler 2. Art** (oder β-Fehler), wenn die Nullhypothese H_1 fälschlicherweise *beibehalten* wird, obwohl sie *falsch* ist.

Man spricht bei einem Fehler 1. Art auch häufig von einem „falsch negativen“ (engl., *false negative*) Ergebnis (oder Diagnose), also wenn die Nullhypothese eigentlich wahr ist, sie dennoch in der Entscheidung abgelehnt wird. Im Gegenzug bezeichnet ein „falsch positiven“ Ergebnis, wenn ein Fehler 2. Art auftritt und man damit irrtümlich von der Nullhypothese ausgeht (siehe Abb. 45).

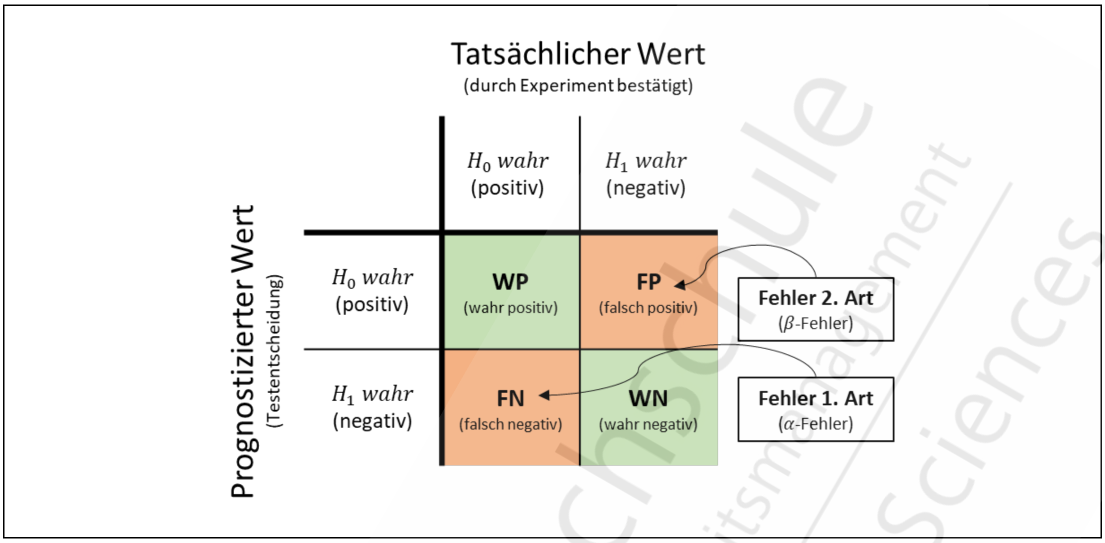


Abb. 45: Überblick über mögliche Szenarien. (© BSA/DHfPG)

Beispiel

Beispiele für Nullhypothesen:

a) Es brennt.
b) Der Angeklagte ist unschuldig.
c) Der Patient ist krank.
d) Die Person hat keine Zugangsberechtigung.

WAHR/POSITIV:

a) Der Feuermelder schlägt Alarm, weil es brennt.
b) Der Angeklagte ist unschuldig und wird freigesprochen.
c) Der Patient ist krank und wird auch als krank getestet.
d) Die Person hat keine Zugangsberechtigung und wird nicht eingelassen.

FALSCH/POSITIV:

a) Der Feuermelder schlägt Alarm, obwohl es nicht brennt.
b) Der Angeklagte ist schuldig und wird dennoch freigesprochen.
c) Der Patient ist gesund, wird aber als krank getestet.
d) Die Person hat eine Zugangsberechtigung, wird aber nicht eingelassen.

WAHR/NEGATIV:

a) Der Feuermelder schlägt nicht Alarm, weil es auch nicht brennt.
b) Der Angeklagte ist schuldig und wird daher auch verurteilt.
c) Der Patient ist gesund und wird auch als gesund getestet.
d) Die Person hat eine Zugangsberechtigung und wird eingelassen.

Deutsche Hochschule für Prävention und Gesundheitsmanagement University of Applied Sciences